Potentiel électrostatique

I Travail de la force électrostatique

$\vec{F}$ conservative, ne dépend pas du chemin suivi ; $W_{AB} = -(Ep(B) - Ep(A))$

$$\boxed{\vec{F} = Q\vec{E} = Q\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}}$$

en coordonnées sphériques : $\boxed{\overrightarrow{dl} = dr.\overrightarrow{u_r} + r.d\theta.\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta.d\varphi.\overrightarrow{u_\varphi}}$

$Ep = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r} + Ep_0$ et $Ep_0 = 0$ pour r → +∞

On écrit : $Ep = Q.V(M)$ avec V(M) le potentiel électrostatique créé par q au point M :

$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ Exprimé en Volt

On généralise avec le principe de superposition.

Potentiel crée par une distribution de charges ponctuelles :

$\boxed{V(M) = \sum_i \frac{qi}{4\pi\varepsilon_0 MiM} + V_0}$ MiM la distance du point Mi au point M.

V est défini partout sauf aux points Mi.

Potentiel crée par une distribution volumique de charges :

$$\boxed{V(M) = \iiint_D \frac{\rho(P)d\tau}{4\pi\varepsilon_0 PM} + V_0}$$

V est partout défini et continu.

Potentiel crée par une distribution surfacique de charges :

$$\boxed{V(M) = \iint_D \frac{\sigma(P)dS}{4\pi\varepsilon_0 PM} + V_0}$$

V est défini et continu, $\vec{E}$ présente une discontinuité à la traversée de la surface.

Potentiel crée par une distribution linéique de charges :

$$\boxed{V(M) = \int_D \frac{\lambda(P)dl}{4\pi\varepsilon_0 PM} + V_0}$$

V et $\vec{E}$ ne sont pas définis sur la distribution.

II Lien entre $\vec{E}$ et V

Circulation de $\vec{E}$:

Sur une courbe Γ allant d'un point A à un point B : $C = \int_{A(\Gamma)}^{B} \vec{E}.\overrightarrow{dl}$ d'où : $dC = \vec{E}.\overrightarrow{dl}$ (circulation élémentaire)

C ne dépend pas du chemin suivi.

Circulation élémentaire $\vec{E}.\overrightarrow{dl} = -dV$

Conséquence : la circulation de $\vec{E}$ le long d'un contour fermé est nulle : $\oint_\Gamma \vec{E}.\overrightarrow{dl} = 0$

Vecteur gradient

$dV = \overrightarrow{grad}\ V.\overrightarrow{dl}$

où $\boxed{\overrightarrow{grad}\ V = \left(\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{y,z}, \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{x,z}, \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{x,y} \right)}$

et $\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\ V}$ On dit que $\vec{E}$ est un champ de gradient

La fonction $\overrightarrow{grad}$ est linéaire ($\overrightarrow{grad}(\lambda V_1 + V_2) = \lambda \overrightarrow{grad}\ V_1 + \overrightarrow{grad}\ V_2$)

On peut utiliser cette relation pour calculer $\vec{E}$ connaissant V ou le contraire.

Invariance de jauge : V est défini à une constante V_0 près, la valeur du champ $\vec{E}$ ne dépend pas de cette constante (dérivation ➔ 0) On dit que $\vec{E}$ est invariant de jauge.

En coordonnées cylindrique :

$\boxed{\overrightarrow{grad}\ V = \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{\theta,z} \overrightarrow{u_r} + \left.\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_{r,z} \overrightarrow{u_\theta} + \left.\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{r,\theta} \overrightarrow{u_z}}$ on a aussi $\overrightarrow{grad}\ V = \vec{\nabla} V$

En coordonnées sphériques :

$\boxed{\overrightarrow{grad}\ V = \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} \overrightarrow{u_r} + \left.\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi} \overrightarrow{u_\theta} + \left.\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta} \overrightarrow{u_\varphi}}$

Topographie :

Le vecteur $\overrightarrow{grad}$ V est orthogonal aux surfaces de niveau de V appelées surfaces équipotentielles (V = cst)

Et $\vec{E}$ est dans le sens des potentiels décroissants.

Principe de Curie → V doit présenter les mêmes propriétés d'invariance et de symétrie que la distribution de charges.

III Retour sur l'aspect énergétique

$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\ Ep}$

Energie potentielle d'interaction :

2 charges q_1 et q_2 aux points M_1 et M_2

un opérateur qui souhaite mesurer l'énergie potentielle de cette distribution va mesurer l'énergie à fournir pour amener les 2 charges à l'infini.

$W_{op} = -Ep_{(initiale)}$

L'énergie d'interaction entre les 2 charges est :

$\boxed{Ep_{\text{int}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 M_1 M_2}}$

Remarque : on peut faire le même travail avec l'interaction gravitationnelle.